Следует отметить, что мы будем рассматривать только линейные дифференциальные уравнения второго порядка; однако многие утверждения, которые приведем для этих уравнений остаются справедливыми и для линейных уравнений более высокого порядка и даже для некоторых нелинейных уравнений.

Итак, рассмотрим уравнение

$$a(x)u''(x)+b(x)u'(x)+C(x)u=0, \quad a\neq 0 \quad \text{при} \quad x\in(a,b). \tag{51}$$

Это уравнение всегда можно привести к виду

$$Lu \equiv -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right]+q(x)u=0. \tag{52}$$

Для этого достаточно умножить уравнение (51) на

$$\mu(x)=\frac{\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x}\frac{b(\xi)}{a(\xi)}d\xi\right)}{a(x)}$$

и ввести обозначения

$$p(x)=\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x}\frac{b(\xi)}{a(\xi)}d\xi\right), \qquad q(x)=\frac{C(x)p(x)}{a(x)}.$$

Рассмотрим также граничные операторы

$$\begin{cases} R_1u\equiv\alpha_1u(a)+\alpha_2u'(a)+\alpha_3u(b)+\alpha_4u'(b); \\ R_2u\equiv\beta_1u(a)+\beta_2u'(a)+\beta_3u(b)+\beta_4u'(b), \end{cases} \tag{53}$$

где α_i, β_i, $i=1, 2, 3, 4,$ – вещественные числа, которые удовлетворяют следующим условиям

$$p(b)\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}=p(a)\begin{vmatrix}\alpha_3 & \alpha_4\\ \beta_3 & \beta_4\end{vmatrix}. \tag{54}$$

Будем считать далее всюду, что $p(x)\in C^1[a,b]$, $p(x)>0$, $q(x)\in C[a,b]$.

Пусть $u, \upsilon\in C^2(a,b)\cap C^1[a,b]$ – произвольные функции. Тогда нетрудно проверить, что

$$\upsilon L u - u L \upsilon = -\frac{d}{dx}\left[p\left(u'\upsilon - \upsilon' u\right)\right].$$

Интегрируя это равенство по промежутку (a, b), получим формулу Грина

$$\int_a^b (\upsilon L u - u L \upsilon)\, dx = \left[-p(x)(u'\upsilon - \upsilon' u)\right]_{x=a}^{x=b},$$

которую можно переписать в виде

$$(Lu, \upsilon) - (u, L\upsilon) = \left(p(x)\begin{vmatrix} u & \upsilon \\ u' & \upsilon' \end{vmatrix}\right)_{x=a}^{x=b}. \qquad (55)$$

Пусть $u(x),\ \upsilon(x) \in C^2(a, b) \cap C^1[a, b]$ и $R_i u = R_i \upsilon = 0,\ \ i = 1, 2.$ Тогда нетрудно показать, пользуясь условиями (54), что $(Lu, \upsilon) = (u, L\upsilon)$. Таким образом, оператор L при выполнении условия (54) является самосопряженным (с нулевыми граничными условиями).

Понятие о задаче Штурма–Лиувилля

Рассмотрим уравнение

$$Lu(x) = \lambda r(x) u(x), \quad x \in (a, b), \qquad (56)$$

где $r(x) \in C[a, b]$ и $r(x) > 0$ на $[a, b]$, λ – комплексное число с однородными граничными условиями

$$R_1 u = R_2 u = 0. \qquad (57)$$

Значения λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения (56) с граничными условиями (57), называют собственными значениями (собственными числами), а сами нетривиальные решения – собственными функциями задачи (56), (57).

Если собственному значению λ соответствует m линейно независимых собственных функций, то число m называют кратностью этого собственного значения.

Задача Штурма–Лиувилля – задача о нахождении всех собственных значений и всех собственных функций задачи (56), (57).

Замечание 18. 1. Граничные условия $u(a) = u(b) = 0$ – нулевые данные Дирихле. 2. Граничные условия $u'(a) = u'(b) = 0$ – нулевые данные Неймана. 3. Граничные условия $\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = = \alpha_3 u(b) + \alpha_4 u'(b) = 0,\ \ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0,\ \ \alpha_3^2 + \alpha_4^2 \neq 0$ – нулевые смешанные граничные условия. 4. Граничные условия $u(a) = u(b)$, $u'(a) = u'(b)$ называют периодическими граничными данными.

Рассмотрим краевую задачу

$$Lu(x)=f(x), \tag{58}$$

$$R_1u=R_2u=0, \tag{59}$$

где $f(x)\in C[a,b]$.

Если $\lambda=0$ не является собственным значением задачи Штурма–Лиувилля (т.е. задача (58), (59) имеет единственное решение при любой $f(x)\in C[a,b]$), то функцией Грина задачи (58), (59) является функция $G(x,y)$ двух переменных $a\le x\le b$; $a\le y\le b$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $G(x,y)$ непрерывна по x и по y в прямоугольнике $\{a\le x\le b;\ a\le y\le b\}$;

2) при фиксированном $y\in(a,b)$ $G(x,y)$ как функция переменного x обладает свойствами $G\in C^2(a,y)$, $G\in C^2(y,b)$ и $L_xG(x,y)=0$ при $x\ne y$;

3) при фиксированном $y\in(a,b)$ $G(x,y)$ как функция переменного x удовлетворяет однородным краевым условиям $R_1G=R_2G=0$;

4) при фиксированном $y\in(a,b)$ первая производная G'_x пре-

$$G'_x(y+0,y)-G'_x(y-0,y)=-\frac{1}{p(y)}.$$

<u>Замечание 19.</u> Нетрудно показать, что функция Грина $G(x,y)$ обладает свойствами: а) $G(x,y)=G(y,x)$ – свойство симметрии; б) для любого $x\in(a,b)$ $G'_x(x,x+0)-G'_x(x,x-0)=\dfrac{1}{p(x)}$ – свойство скачка по второму аргументу.

Справедлива теорема.

<u>Теорема 17.</u> Если $\lambda=0$ не является собственным значением задачи Штурма–Лаувилля, то существует единственная функция Грина задачи (58), (59).

Можно рекомендовать следующий метод нахождения функции Грина. Пусть $u(x)$ и $\upsilon(x)$ – два линейно независимых на $[a,b]$ решения уравнения $Lu(x)=0$ (они всегда существуют), тогда функция Грина $G(x,y)$ ищется в виде

$$G(x, y) = \begin{cases} A_1 u(x) + A_2 \upsilon(x), & a \le x \le y; \\ A_3 u(x) + A_4 \upsilon(x), & y \le x \le b, \end{cases} \tag{60}$$

где A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ – постоянные, зависящие только от y.

Из условий 1), 3), 4) определения функции Грина получаем для нахождения коэффициентов A_1, A_2, A_3, A_4 систему уравнений

$$\begin{cases} A_1 u(y) + A_2 \upsilon(y) - A_3 u(y) - A_4 \upsilon(y) = 0; \\ A_1 u'(y) + A_2 \upsilon'(y) - A_3 u'(y) - A_4 \upsilon'(y) = \dfrac{1}{p(y)}; \\ A_1 R_1 u + A_2 R_1 \upsilon = 0; \\ A_3 R_2 u + A_4 R_2 \upsilon = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы, как нетрудно показать, всегда отличен от нуля. Поэтому у выписанной системы всегда существует единственное решение A_1, A_2, A_3, A_4. Подставляя найденные коэффициенты A_1, A_2, A_3, A_4 в (60), найдем искомую функцию Грина $G(x, y)$ краевой задачи (58), (59).

<u>Замечание 20.</u> Функцию Грина задачи (58), (59) можно искать также в виде

$$G(x, s) = \begin{cases} a y_1(x), & a \le x \le s; \\ b y_2(x), & s \le a \le b, \end{cases} \tag{61}$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – ненулевые решения уравнения $Lu = 0$, удовлетворяющие, соответственно, первому и второму из граничных условий, но ни одна из этих функций не удовлетворяет сразу обоим краевым условиям. Если такие решения $y_1(x)$, $y_2(x)$ уравнения $Lu = 0$ существуют (т.е. если $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), то функция Грина существует и функции $a(s)$ и $b(s)$ в (61) находятся из условий 1) и 4) определения функции Грина.

Имеет место следующее утверждение.

<u>**Теорема 18 (Гильберта).**</u> Если $\lambda = 0$ не есть собственное значение задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), то краевая задача (58), (59) имеет единственное решение при любой $f(x) \in C[a, b]$ и это решение имеет вид

$$u(x)=\int_a^b G(x, y) f(y) dy,$$

где $G(x, y)$ – функция Грина данной задачи.

Следствие 4. Если $\lambda = 0$ не есть собственное значение задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), то для любой функции $\Phi(x) \in \in C^2[a, b]$ и удовлетворяющей краевым условиям (59) справедливо представление

$$\Phi(x)=\int_a^b G(x, y) L\Phi(y) dy.$$

Свойства собственных чисел и собственных функций задачи Штурма–Лиувилля. Теоремы разложения

Теорема 19. Если $\lambda = 0$ не есть собственное значение задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), то задача Штурма–Лиувилля (56), (57) эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x)=\lambda\int_a^b r(y) G(x, y) u(y) dy, \quad x \in (a, b), \tag{62}$$

где $G(x, y)$ – функция Грина задачи (56), (57).

Иначе, если $\lambda = 0$ не есть собственное значение задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), то любое собственное значение и соответствующая собственная функция задачи Штурма–Лиувилля (56), (57) являются характеристическим значением и собственной функцией интегрального уравнения (62) и наоборот.

Замечание 21. Если $r(x) \not\equiv 1$, то ядро интегрального уравнения (62) не самосопряженное, однако справедливо следующее утверждение.

Утверждение 10. Если $\lambda = 0$ не есть собственное значение задачи Штурма-Лиувилля (56), (57), то задача Штурма–Лиувилля (56), (57) эквивалентна интегральному уравнению

$$\omega(x)=\lambda\int_a^b \mathrm{K}(x, y) \omega(y) dy \tag{63}$$

с самосопряженным ядром $K(x, y)$, где $\omega(x) = \sqrt{r(x)}\, u(x)$, $K(x, y) = \sqrt{r(x) r(y)}\, G(x, y)$, а $G(x, y)$ – функция Грина задачи (56), (57).

Свойства собственных чисел и собственных функций задачи Штурма–Лиувилля

Если $\lambda = 0$ не есть собственное значение задачи Штурма-Лиувилля (56), (57), то справедливы следующие свойства.

Свойство 1. Все собственные значения задачи Штурма–Лиувилля (56), (57) вещественны.

Свойство 2. Множество собственных значений задачи Штурма–Лиувилля (56), (57) счетно. При этом каждое собственное значение имеет кратность не более чем два (при общих краевых условиях). Если же краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1 u &= \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0; \\ \tilde{R}_2 u &= \beta_3 u(b) + \beta_4 u'(b) = 0, \quad \beta_3^2 + \beta_4^2 \neq 0, \end{aligned} \tag{64}$$

то все собственные значения задачи (56), (64) – простые, т.е. имеют кратность один.

Свойство 3. На каждом отрезке числовой оси содержится не более конечного числа собственных значений.

Свойство 4. Собственные функции $\varphi_i(x)$ и $\varphi_K(x)$ задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), отвечающие различным собственным значениям, ортогональны на отрезке $[a, b]$ с весом $r(x) > 0$, т.е.

$$\int_a^b r(x) \varphi_i(x) \varphi_K(x)\, dx = 0, \quad i \neq K.$$

Свойство 5. Собственные числа задачи Штурма–Лиувилля (56), (57) являются характеристическими значениями интегрального уравнения (63) и наоборот.

При этом, если $\{\lambda_K\}_1^\infty$ – собственные значения $[\lambda_1] \leq |\lambda_2| \leq \ldots \leq$ $\leq \ldots \leq |\lambda_n| \leq \ldots$ задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), то функции $\omega_K(x) = \sqrt{r(x)}\, u_K(x)$, $K = 1, 2, \ldots$ (где $u_K(x)$ – собственная функция задачи (56), (57), отвечающая собственному значению λ_K), образуют максимальную ортонормированную систему из собственных функций интегрального уравнения (63), если функции $u_K(x)$ образуют максимальную ортонормированную систему с весом $r(x)$ из собственных функций задачи Штурма–Лиувилля (56), (57).

<u>**Теорема 20.**</u> Если $\lambda = 0$ не есть собственное значение задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), то для любой функции $f(x) \in C[a, b]$ решение $u(x)$ задачи (58), (59) раскладывается в ряд Фурье по максимальной ОНС $\{u_K(x)\}_r$, $K = 1, 2, \ldots$, с весом $r(x)$ из собственных функций задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), т.е.

$$u(x) = \sum_{K=1}^{\infty} (u, u_K)_r u_K = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{(f, u_K)}{\lambda_K} u_K(x),$$

где $(u, u_K)_r = \int_a^b r(y) u(y) u_K(y)\, dy = \frac{1}{\lambda_K} \int_a^b f(y) u_K(y)\, dy$ и этот ряд сходится абсолютно и равномерно на $[a, b]$.

<u>**Теорема 21**</u> **(Стеклова).** Если $\lambda = 0$ не есть собственное значение задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), то для любой функции $\Phi(x) \in C^2[a, b]$, удовлетворяющей краевым условиям $R_1\Phi = R_2\Phi = 0$, ее ряд Фурье

$$\Phi(x) = \sum_{K=1}^{\infty} (\Phi, u_K)_r u_K(x)$$

по максимальной ОНС $\{u_K(x)\}_r$, $K = 1, 2, \ldots$, с весом $r(x)$ из собственных функций задачи Штурма–Лиувилля (56), (57) сходится к функции $\Phi(x)$ абсолютно и равномерно на $[a, b]$.

<u>Следствие 5.</u> Если $\lambda = 0$ не есть собственное значение задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), то максимальная ОНС $\{u_K(x)\}_r$, $K = 1, 2, \ldots$, с весом $r(x)$ из собственных функций задачи Штурма–Лиувилля есть ОНБ и ПОНС в $L_2(r; (a, b))$, т.е. для любой

функции $g(x) \in L_2(r; (a, b))$ с нормой $\int\limits_a^b r(x)|g(x)|^2\, dx < +\infty$ следует, что

$$\left\| g(x) - \sum_{\mathrm{K}=1}^{n} (g, u_{\mathrm{K}})_r\, u_{\mathrm{K}} \right\|_{L_2(r;\,(a,b))} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следствие 6. Если $\lambda = 0$ есть собственное значение задачи Штурма–Лиувилля (56), (57) (ему соответствует не более двух линейно независимых собственных функций $u_0^{(1)}(x)$, $u_0^{(2)}(x)$ ортонормированных с весом $r(x)$), то ортонормированная система функций $\left\{u_0^{(i)}, u_{\mathrm{K}}\right\}_r$, $i = 1, 2$; $\mathrm{K} = 1, 2, \ldots$, с весом $r(x)$ из собственных функций задачи Штурма–Лиувилля (56), (57) есть ОНБ и ПОНС в $L_2(r; (a, b))$, т.е. для любой функции $g(x) \in L_2(r; (a, b))$ следует, что

$$\left\| g(x) - \left(g, u_0^{(1)}\right)_r u_0^{(1)} - \left(g, u_0^{(2)}\right)_r u_0^{(2)} - \sum_{\mathrm{K}=1}^{n} (g, u_{\mathrm{K}})_r\, u_{\mathrm{K}} \right\|_{L_2(r;\,(a,b))} \to 0$$

при $n \to \infty$.